ALGEBRE

(durée 2 heures 30 environ) (N.B. - Les parties I et II sont indépendantes).

- I -

L'espace vectoriel euclidien orienté E de dimension 3 est rapporté à une base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

A - Un vecteur $\vec{w}$ de composantes (a, b, c) étant donné, on considère l'application qui, à tout vecteur $\vec{v}$ de E, associe le vecteur $T(\vec{v}) = \vec{v} \wedge \vec{w}$.

❶ Montrer que T est un endomorphisme de E.
Ecrire la matrice $\mathcal{T}$ de T par rapport à la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

❷ Montrer que l'opérateur adjoint T^* de T vérifie : $T^* = -T$.
Calculer T^2 et exprimer T^3 en fonction de T.

❸ Déterminer le noyau de T et l'image de T, $Im\ T$.

❹ Application : on prend $a = -\frac{1}{3}$, $b = c = \frac{2}{3}$.

a) Montrer que les vecteurs : $\vec{I} : \frac{1}{3}(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k})$ et $\vec{J} : \frac{1}{3}(2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k})$ forment une base orthonormée de $Im\ T$.
b) Montrer que $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{w})$ est une base orthonormée directe de E dont on déterminera l'image par T.
c) Calculer la matrice de T par rapport à la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{w})$.

❺ *a*) Montrer que T n'a pas de valeur propre réelle non nulle. Est-ce que 0 est valeur propre de T ?
b) Pour tout nombre réel d non nul, on considère l'endomorphisme :

$$R_d = (T + dI)^{-1}(-T + dI)$$

où I est l'endomorphisme unité de E. Justifier l'existence de R_d.

Montrer que la matrice $\mathcal{R}_d$, par rapport à la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de R_d est orthogonale et que, pour $\vec{w}$ fixé, toutes les matrices $\mathcal{R}_d$ $(d \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus 0)$ admettent un vecteur propre en commun.
c) On se propose de montrer de deux façons que R_d s'écrit comme un trinôme du second degré en T. On note : $w^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

c.1) Ecrire le polynôme caractéristique P de T sous la forme :

$$P(\lambda) = (\lambda + d)\, Q(\lambda) + \mu$$

où $Q(\lambda)$ est un polynôme de degré 2 et μ une constante qui s'exprime en fonction de d et w^2. En déduire $(dI + T)^{-1}$, puis R_d.

c.2) Montrer que : $(w^2 I + T^2)\, R_d = (w^2 I + T^2)$
et $(d^2 + w^2)\, R_d = T^2 - 2dT + d^2 I + (w^2 I + T^2)\, R_d$.

En déduire que :

$$R_d = \frac{1}{w^2+d^2}\ Q_1(T)$$

où Q_1 est le polynôme $Q_1(X) = 2X^2 - 2dX + (w^2+d^2)$.

d) Au vecteur $\vec{v}(x, y, z)$ de E, on associe le vecteur $\vec{v}'(x', y', z')$ de E tel que $\vec{v}' = R_d(\vec{v})$.
Calculer x', y' et z' en fonction de x, y et z.
Montrer que la transformation ainsi obtenue est une rotation vectorielle d'axe le support de $\vec{w}(a, b, c)$. Déterminer l'angle θ de cette rotation en calculant $cos\theta$ et $sin\theta$.

B - On considère l'application S de E dans E définie par :

$$\forall\ \vec{v} \in E,\ S(\vec{v}) = (\vec{w}.\vec{v})\ \vec{w}\ .$$

❶ Vérifier que S est un endomorphisme.
Calculer sa matrice $\mathcal{S}$, par rapport à $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, son noyau et son image.

On se place, dans les deux questions suivantes, dans le cas de l'application I.4, c'est-à-dire : $\vec{I} : \frac{1}{3}(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k})$ et $\vec{J} = \frac{1}{3}(2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k})$ et $\vec{w} = -\frac{1}{3}\vec{\imath} + \frac{2}{3}(\vec{\jmath} + \vec{k})$.

❷ On considère l'endomorphisme $T + S$. Soit $\vec{v}$ de coordonnées X, Y, Z par rapport à la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{w})$. Calculer les coordonnées X', Y', Z' par rapport à cette même base de $(T+S)(\vec{v})$. Quelle est la matrice de $T+S$ par rapport à cette base ?

❸ Déterminer le sous-espace des vecteurs invariants par $T+S$. En déduire que $T+S$ est une rotation vectorielle dont on précisera l'axe et l'angle.

- II -

A - On considère l'espace vectoriel E des fonctions polynomiales f de la variable réelle t, à coefficients complexes. On pose :

$$(f \mid g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$$

pour tout couple d'éléments f et g de E.

❶ Montrer que $(f \mid g)$ définit un produit hermitien sur E.

❷ Soient P et Q les opérateurs linéaires de E dans lui-même :

$$P : f \longrightarrow F \text{ où } F(t) = t\,f(t)$$

$$Q : g \longrightarrow G \text{ où } G(t) = i[g'(t) - tg(t)]\ .$$

Montrer que $PQ - QP = -iI$ (I : identité) et que P et Q sont auto-adjoints (ou symétriques).

❸ En déduire que $H = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2)$ est auto-adjoint.

❹ Montrer que si $\varphi \in E$ alors

$$H(\varphi) = \psi \quad où \quad \psi(t) = -\frac{1}{2}\varphi''(t) + t\varphi'(t) + \frac{1}{2}\varphi(t).$$

❺ Montrer que si H admet une valeur propre λ, alors λ est de la forme : $\lambda = n + \frac{1}{2}$ (n entier positif ou nul). Pour cela, on écrira l'équation différentielle vérifiée par les vecteurs propres.

❻ Montrer, par récurrence sur n, que l'équation différentielle précédente correspondant à la valeur $\lambda = n + \frac{1}{2}$ admet pour solution une fonction polynomiale $f_n(t)$ de degré n : on passera de $n-1$ à n en prenant une primitive.

En déduire les valeurs propres de H.

❼ Si $n \neq m$, montrer que les vecteurs propres f_n et f_m sont orthogonaux.

B - Généralisation de A

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit hermitien noté $(x|y)$ $\forall x, y \in E$. Soient P et Q deux opérateurs auto-adjoints de E dans lui-même vérifiant :

$$PQ - QP = -iI \quad (I \textit{ identité de } E).$$

On pose $A = \frac{1}{\sqrt{2}}(P + iQ)$ et $H = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2)$.

❶ Si A^* désigne l'adjoint de A, calculer A^*, AA^* et A^*A. En déduire deux expressions différentes de H en fonction de A et A^*.

❷ Si H admet un vecteur propre x relatif à la valeur propre λ montrer que :

a) $(A^*(x), A^*(x)) = (\lambda - \frac{1}{2})(x \mid x)$.

b) On a l'alternative : ou bien : $\lambda = \frac{1}{2}$ et $A^*(x) = 0$

ou bien : $\lambda > \frac{1}{2}$ et $A^*(x)$ est vecteur propre de H.

❸ Montrer que les valeurs propres de H sont nécessairement de la forme $n + \frac{1}{2}$, n étant un entier positif ou nul.

GEOMETRIE

(durée 1 heure 30 environ)

A - L'espace $\mathbb{R}^3$ est rapporté à un repère orthonormé $0xyz$. On considère dans cet espace les deux plans d'équation :

$$(P_1) : y = \lambda(x + a)$$
$$(P_2) : x = \mu(y - z)$$

λ et μ étant deux paramètres réels, a un nombre réel fixé.

❶ Montrer que les plans P_1 ainsi que les plans P_2 forment deux faisceaux linéaires dont on déterminera l'arête.

❷ Trouver la droite (D) intersection de P_1 et P_2 et donner une relation nécessaire et suffisante pour que cette droite rencontre le cercle (C) du plan xoy de centre $A(-a, 0, 0)$ et de rayon a.

❸ On suppose que la relation précédente entre λ et μ est vérifiée : montrer que la droite (D) engendre une surface dont il faut déterminer l'équation cartésienne.

B - Soit (S) la surface d'équation cartésienne :

$$y[(y-z)^2 - x^2] + 2x(x+a)(y-z) = 0 .$$

Le but de cette partie est d'étudier les sections de cette surface par des plans parallèles au plan xoy.

Soit (C_h) la courbe section de (S) par le plan $z = h$ $(h \in \mathbb{R})$.

❶ Si $h = 0$, déterminer (C_0).

❷ On suppose que $h \neq 0$. Soit O' le point du plan $z = h$, de coordonnées $x = 0$, $y = h, z = h$. On prend le repère $O'XYZ$ d'origine O' et d'axes parallèles à $0xyz$.

Donner l'équation de la surface (S) par rapport à ce nouveau repère et montrer que l'équation de (C_h) section de S par le plan $z = h$ est :

$$Y(X^2 + Y^2) - h(X^2 - Y^2) + 2a\,XY = 0 .$$

❸ Donner l'équation de (C_h) en coordonnées polaires, en posant $h = a\ tan\ 2\alpha$

$$r = f(\theta)$$

Montrer que cette équation s'écrit : $r = f_2(\theta) - f_1(\theta)$ où $r_1 = f_1(\theta)$ est l'équation d'une droite parallèle à l'axe polaire et $r_2 = f_2(\theta)$ est l'équation d'un cercle que l'on précisera.

❹ En écrivant $r = PQ$, Q décrivant la droite et P le cercle, de façon dépendante, en déduire la construction géométrique d'un point quelconque M de (C_h) ainsi que celle de la tangente en ce point (en utilisant par exemple la sous-normale polaire).

❺ Tracer la courbe C_h. Préciser les tangentes au point double, le point d'intersection avec l'asymptote et les points où la tangente C est parallèle à l'asymptote.

❻ On prend $h = a$. Calculer l'aire de la boucle de la courbe (C_a).